Universität Bremen
Fachbereich 3
Megow/Eberle

Einführung in die Lineare Optimierung
SoSe 2017

Übungsblatt 2 Abgabe: 25.04.2017

Aufgabe 1 Wechselstube (5 Pkte.)

Nimm an, es gibt N verschiedene Währungen und eine Einheit der $i$ten Währung kann in r_{ij} Einheiten der $j$ten Währung getauscht werden. Aufgrund einiger Börsenregulatorien ist es nicht möglich, mehr als u_i Einheiten der $i$ten Währung an einem Tag zu wechseln. Nimm an, dass wir mit B Einheiten der ersten Währung morgens in den Tag starten und dass wir die Anzahl der Einheiten der Nten Währung am Ende des Tages maximieren wollen. Gib ein Lineares Progamm an unter der zusätzlichen Annahme, dass für alle Folgen $i_1, \ldots, i_k$ an Währungen

$$r_{i_1,i_2} r_{i_2,i_3} \cdots r_{i_{k-1},i_k} r_{i_k,i_1} \leq 1$$

gilt, d.h., dass kein Vermögen erzeugt werden kann, indem ein Kreis an Währungen durchlaufen wird.

Aufgabe 2 Konvexe Mengen (4 Pkte.)

(a) Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige oder widerlege:

- $C \cap D$ ist konvex.
- $C \cup D$ ist konvex.
- $C \setminus D$ ist konvex.
- $C + D := \{x + y \mid x \in C, y \in D\}$ ist konvex.
- $\alpha C := \{\alpha x \mid x \in C\}$ ist konvex.

(2 Pkte.)

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ sowie für alle $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Zeige, dass für eine gegebene Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ konvex ist. (1 Pkt.)

(c) Eine Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt die Bedingungen

(i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ sowie

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Zeige, dass die Einheitskugel $\mathbb{B}_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ konvex ist. (1 Pkt.)

Aufgabe 3 Polyeder (6 Pkte.)

Zeige oder widerlege, dass folgende Mengen Polyeder sind.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 \leq 0\}$. (1 Pkt.)

(b) Die leere Menge. (1 Pkt.)

(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \leq 0\}$. (1 Pkt.)

(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \leq 0, x_1 \geq 0\}$. (1 Pkt.)

(e) Die Menge der $x \in \mathbb{R}^2$, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{rcrl} x_1 \cos\theta & + & x_2 \sin\theta & \leq 1 \text{ für alle } \theta \in [0, \pi/2] \\ x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

(2 Pkte.)

Aufgabe 4 Extrempunkte (5 Pkte.)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Der Punkt $x \in M$ heißt Extrempunkt von M, falls keine zwei Punkte $x, y \in M$ existieren, so dass $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ gilt. Zeige oder widerlege folgende Aussagen über Extrempunkte:

(a) Jede konvexe Menge entält mindestens einen Extrempunkt. (1 Pkt.)

(b) Die Menge der Extrempunkte ist endlich. (1 Pkt.)

(c) Seien $a_1, \ldots a_s \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Menge der Extrempunkte von $\operatorname{conv}(\{a_1, \ldots, a_s\})$ ist eine Teilmenge von $\{a_1, \ldots, a_s\}$. (1 Pkt.)

(d) Schreibe folgendes Problem in Matrixschreibweise um, zeichne die zulässige Region und gib alle Extrempunkte an.

$$\begin{array}{rcrl} 2x_1 & + & x_2 & \leq 4 \\ x_1 & - & x_2 & \geq -2 \\ -x_1 & + & x_2 & \geq -\frac{1}{2} \\ x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array} \tag{P}$$

(2 Pkte.)