Universität Bremen
Fachbereich 3
Megow/Eberle

Einführung in die Lineare Optimierung
SoSe 2017

Übungsblatt 3 Abgabe: 02.05.2017

Aufgabe 1 Produktionsaufgabe (10 Pkte.)

Herr Meier möchte 3 Endprodukte L_1, L_2 und L_3 herstellen, deren Nettoerlöse pro Einheit jeweils 1 sind. Er hat dafür fünf Ressourcen $R_1, \ldots, R_5$ zur Verfügung, die wie folgt mit der Produktion zusammenhängen:

- Bei der Produktion einer Einheit von L_1 wird eine Einheit, bei der Produktion einer Einheit von L_2 werden zwei Einheiten und bei der Produktion einer Einheit von L_3 wird eine Einheit von Ressource R_1 verbraucht. Von R_1 stehen ihm drei Einheiten zur Verfügung.
- Bei der Produktion einer Einheit von L_1 werden zwei Einheiten von R_2 produziert und bei der Produktion einer Einheit von L_2 wird eine Einheit von R_2 verbraucht. Zu Beginn stehen ihm keinerlei Einheiten der zweiten Ressource zur Verfügung.
- Für $i \in \{1, 2, 3\}$ wird bei der Produktion einer Einheit von L_i genau eine Einheit von R_{i+2} verbraucht, die anderweitig nicht verwendet wird. Herr Meier hat jeweils eine Einheit der Ressourcen R_3, R_4 und R_5 zur Verfügung.

(a) Stelle ein Lineares Programm unter Verwendung der Variablen x_1, x_2 und x_3 auf, die die Produktionsmengen der Endprodukte L_1, L_2 und L_3 modellieren, um den Nettoerlös von Herrn Meier zu maximieren (*Achtung: Kein ILP!*). (2 Pkte.)

(b) Zeichne den zulässigen Bereich. (3 Pkte.)

(c) Gib alle Basislösungen an und bestimme, welche zulässig sind und welche die Optimallösung ist. Welche sind benachbart? (5 Pkte.)

Aufgabe 2 Standardnormalform (5 Pkte.)

Wandle folgende LPs in Standardnormalform um und gib sie in Matrixschreibweise an.

(a)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1 \\
& 2x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & & & & & = & 2 \\
& x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 6x_5 & \geq & 3 \\
& -3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & \geq & 4 \\
& x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & & & x_4 & & & \leq & 0
\end{array}
\qquad (P_a)
$$

(3 Pkte.)

(b)

$$\begin{array}{llcccl} \min & c^\mathsf{T} x & + & d^\mathsf{T} y & & \\ \text{s.t.} & Ax & & & \geq & b \\ & Bx & + & Dy & = & f \\ & x & & & \geq & 0 \end{array} \tag{P_b}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^q$ und $f \in R^p$ gelte. (2 Pkte.)

Aufgabe 3 Basislösungen (5 Pkte.)

Betrachte das Zulässigkeitsproblem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$x_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \ x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib für jeden Vektor an, ob dieser Basislösung ist oder nicht. *Begründe deine Antwort!* (3 Pkte.)

(b) Welche der Basislösungen ist zulässig? *Begründe deine Antwort!* (2 Pkte.)