Universität Bremen
Fachbereich 3
Megow/Eberle

Einführung in die Lineare Optimierung
SoSe 2017

Übungsblatt 8 — Abgabe: 06.06.2017

Aufgabe 1 Dualität bei Graphenproblemen (8 Pkte.)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei V die Knotenmenge und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Kantenmenge sei. Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Teilmenge der Kanten, sodass sich keine zwei verschiedenen Kanten einen Endknoten teilen.

(a) Begründe, dass folgendes ILP ein maximales Matching findet und erkläre die Bedeutung der Variablen:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{e\in E} y_e & & & \\ \text{s.t.} & \sum_{e\in E: v\in e} y_e & \leq & 1 & \forall v \in V \\ & y_e & \in & \{0,1\} & \forall e \in E \end{array} \tag{M}$$

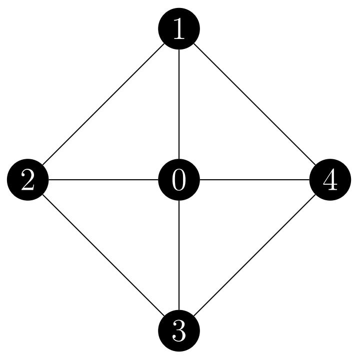
(1 Pkt.)

(b) Zeige, dass die LP-Relaxierung von (M) das duale zur LP-Relaxierung der minimalen Knotenüberdeckung ist:

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{v\in V} x_v & & & \\ \text{s.t.} & x_v + x_w & \geq & 1 & \forall \{v,w\} \in E \\ & x_v & \in & \{0,1\} & \forall v \in V \end{array} \tag{VC}$$

(2 Pkte.)

(c) Folgender Graph sei der Grundriss eines Museums, wobei die Kanten Gänge und die Knoten ihre Kreuzungen im Museum darstellen. Stelle die zugehörigen LP-Relaxierungen für das maximale Matching und die minimale Knotenüberdeckung auf und finde jeweils einen optimalen Punkt. (3 Pkte.)



(d) Was kannst du aus obigen Lösungen über das maximale Matching und die minimale Knotenüberdeckung bzgl. ihrer Größe folgern? (1 Pkt.)

(e) Der Museumsdirektor möchte nun Lasersensoren an den Kreuzungen anbringen, um jeden Gang von mind. einem Sensor überwachen zu lassen. Wie viele Sensoren muss er kaufen? Wo sollte er diese platzieren? (1 Pkt.)

Aufgabe 2 Komplementärer Schlupf (7 Pkte.)

Betrachte das folgende LP:

$$\begin{array}{llcccccc} \min & x_1 & & & + & x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 5 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ & & & x & & & \geq & 0 \end{array} \tag{LP}$$

(a) Löse (LP) mit dem Simplex-Algorithmus. (2 Pkte.)

(b) Ermittle das zu (LP) duale Programm (D). (2 Pkte.)

(c) Ermittle die Bedingungen des komplementären Schlupfes für das Problem und löse damit (D). (3 Pkte.)

Aufgabe 3 Dualität (5 Pkte.)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h., $A = A^\mathsf{T}$. Betrachte das LP

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^\mathsf{T}x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \geq & c \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

Beweise folgende Aussage: Ein x^* mit $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$ ist optimal. (2 Pkte.)

(b) Seien $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$. Betrachte folgendes LP

$$\begin{array}{lcccl} \max & x & & & \\ \text{s.t.} & x & \leq & a_i & \text{für alle } i \in [n] \end{array}$$

Beweise, dass $x^* = \min\{a_i, i \in [n]\}$ eine optimale Lösung ist. Stelle das duale Problem auf und beschreibe in Worten, welches Problem das duale LP löst. (3 Pkte.)