Universität Bremen
Fachbereich 3
Megow/Eberle

Einführung in die Lineare Optimierung
SoSe 2017

Übungsblatt 9 Abgabe: 20.06.2017

Die Abgabe der Lösungen soll bis spätestens 16 Uhr in Raum 3130 erfolgen. Falls der Raum verschlossen ist, bitte die Abgaben einfach unter der Tür durchschieben.

Aufgabe 1 Dualität und Hundewelpen (8 Pkte.)

Eine Hundezüchterin möchte ihre Welpen *barfen* um sie optimal zu ernähren, bis sie zu ihren neuen Familien kommen. Da sie leider keine Zeit hat, die täglichen Menüs selbst zusammenzustellen, wendet sie sich den Lieferanten Barf-Meals und wird von dort fertige Menüs beziehen.
Es stehen n Menüs zur Auswahl, die jeweils unterschiedliche Mengen der verschiedenen Gemüse-, Obst- und Fleischsorten enthalten. Insgesamt gibt es m Zutaten in den Menüs und die Menge an Zutat $i, i \in [m]$, in Menü $j, j \in [n]$, ist $a_{i,j} \geq 0$. Aus ihrer Erfahrung mit früheren Würfen weiß sie, dass jeder Welpe b_i Einheiten von Zutat i im Verlauf einer Woche zu sich nehmen sollte, um sich optimal zu entwickeln. Außerdem ist ihr bekannt, wie teuer Menü j ist ($c_j, j \in [n]$).

(a) Hilf Sophie ein LP (P) aufzustellen, dass die Futterkosten für einen Welpen minimiert und gleichzeitig den Bedarf des Welpen deckt. (2 Pkte.)

(b) Bestimme das duale (D) von (P). (2 Pkte.)

(c) Gib die komplementären Schlupfbedingungen an. (2 Pkte.)

(d) Interpretiere die dualen Variablen und das duale Problem ökonomisch. (1 Pkt.)

Hinweis: Nimm an, dass du derjenige bist, der die einzelnen Zutaten, also Fleisch, Gemüse und Obst, an Barf-Meals verkauft, du weißt, welchen Bedarf die Welpen haben und zu welchem Preis Barf-Meal seine Menüs verkauft. Wie interpretierst du mit diesem Wissen das duale Problem?

(e) Gib eine ökonomische Interpretation der komplementären Schlupfbedingungen. (1 Pkt.)

Aufgabe 2 Lemma von Farkas (3 Pkte.)

Wir wollen zeigen, dass genau eine der folgenden Aussagen gilt:

$$(1)\ \exists x \geq 0 \text{ mit } Ax \leq b$$

$$\text{oder } (2)\ \exists y \geq 0 \text{ mit } y^\top A \geq 0 \text{ und } b^\top y < 0.$$

(a) Es gelte (1). Nimm an, dass (2) ebenfalls wahr ist und finde einen Widerspruch wie in der Vorlesung. (1 Pkt.)

(b) (1) gelte nicht. Wähle $c = 0$ als Zielfunktion, stelle ein ähnliches LP wie in der Vorlesung auf, dualisiere es und folgere, dass das duale unbeschränkt ist.

Aufgabe 3 Dualität bei antisymmetrischen Matrizen (2 Pkte.)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = -A^\mathsf{T}$ heißt antisymmetrisch. Betrachte das LP

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^\mathsf{T} x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & -c \\ & x & \geq & 0. \end{array} \tag{P}$$

Zeige, dass (P) selbst-dual ist, d.h., dass (P) und sein duales Problem äquivalent sind.

Aufgabe 4 Dualität bei Graphenproblemen 2 (9 Pkte.)

Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph, wobei V die Knotenmenge und $A \subseteq V \times V$ die Kantenmenge sei. Für jede Kante $a \in A$ sei $c_a \geq 0$ die Kapazität. Für zwei verschiedene Knoten $s, t \in V$ wird der maximale Wert eines Flusses von s nach t gesucht (vgl. Übungsblatt 0).

(a) Sei $V = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$ und die Kapazitäten des Netzwerks durch die folgende Tabelle gegeben, wobei in der ersten Spalte die Startknoten und in der ersten Zeile die Endknoten der Kanten stehen.

	s	1	2	3	4	t
s	-	3	3	-	-	-
1	-	-	1	1	-	-
2	-	-	-	-	5	-
3	-	-	-	-	-	3
4	-	8	-	2	-	3
t	-	-	-	-	2	-

Zeichne das Netzwerk mit den jeweiligen Kantenkapazitäten (1 Pkt.)

(b) Mit Hilfe des folgenden LPs kann ein maximaler Fluss bestimmt werden.

$$\begin{array}{llcll} \max & f_{(t,s)} & & & \\ \text{s.t.} & \sum_{a \in \delta^+(v)} f_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a & = & 0 & \forall v \in V \\ & f_a & \leq & c_a & \forall a \in A \\ & f_a & \geq & 0 & \forall a \in A, \end{array} \tag{MaxFlow}$$

wobei $A' := A \cup \{(t, s)\}$. Erkläre die Änderung der Zielfunktion, löse das LP mit CPLEX für obiges Netzwerk und zeichne den Fluss in deine Graphik aus (a) ein. (3 Pkte.)

(c) Dualisiere (MaxFlow) unter Verwendung der Variablen p_v für $v \in V$ und $q_{(v,w)}$ für $(v, w) \in A$ und interpretiere das duale Problem. (2 Pkte.)

Zur Erinnerung: Der minimale Schnitt stell einen Engpass im Netzwerk dar, da jeder $s-t-$Fluss von V_s nach V_t gelangen muss und entlang der Schnittkanten nicht mehr Kapazität vorhanden ist.

(d) Bestimme die Werte der dualen Variablen des LPs aus (b) und gib für jede Kante $e \in E$ den Wert q_e an. (1 Pkt.)

Hinweis: Mit `forall( i in Test, j in Test) bsp:  x[i,j] <= p[i,j];` kannst du Nebenbedingungen benennen und mit `bsp[i][j].dual` nach der Ausführung auf die Werte der zugehörigen dualen Variablen zugreifen.

(e) Wie kannst du mit Hilfe des komplementären Schlupfs der Nebenbedingung $f_e \leq c_e$ und der Engpasseigenschaft einen minimalen Schnitt bestimmen? (2 Pkte.)