Übungsblatt 11 Abgabe: 04.07.2017

Aufgabe 1 Greedy für das Knapsack-Problem (4 Pkte.)

Seien n Gegenstände mit Werten $w_1, \ldots, w_n$ und Gewichten $a_1, \ldots, a_n$ sowie ein Rucksack mit Kapazität B gegeben. Betrachte das Knapsack-Problem aus der Vorlesung und folgenden Greedy-Algorithmus. Ordne die Gegenstände o.B.d.A. so, dass

$$\frac{w_1}{a_1} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{a_n}$$

gelte.
Packe nun die ersten k Gegenstände mit $1 \leq k \leq n$ in deinen Rucksack, wobei

$$a_1 + \ldots + a_k \leq B \text{ und } a_1 + \ldots + a_{k+1} > B.$$

(a) Finde ein Beispiel, sodass der Greedy-Algorithmus möglichst weit von der optimalen Lösung abweicht. (2 Pkte.)

(b) Entwickle eine Idee, wie du Greedy doch noch retten kannst. (2 Pkte.)

Aufgabe 2 LP-Relaxations des Knapsack-Problems (6 Pkte.)

Seien n Gegenstände mit Werten $w_1, \ldots, w_n$ und Gewichten $a_1, \ldots, a_n$ sowie ein Rucksack mit Kapazität B wie in Aufgabe 1 gegeben. Das 0-1-Knapsack-Problem lässt sich durch folgendes ILP formulieren:

$$\begin{array}{lrcl} \max & \sum_{j=1}^n w_j x_j & & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_j x_j & \leq & B \\ & x_j & \geq & 0 \\ & x_j & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Wenn man die Ganzzahligkeitsbedingungen relaxiert, erhält man das sogenannte *fraktionale* Knapsack-Problem. Beweise das Lemma aus der Vorlesung:
Sei o.B.d.A.

$$\frac{w_1}{a_1} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{a_n} \qquad (*)$$

und sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ so gewählt, dass $a_1 + \ldots + a_k \leq B$ und $a_1 + \ldots + a_{k+1} > B$ gelte. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \ldots = x_k &= 1, \\ x_{k+1} &= \frac{1}{a_{k+1}}(B - (a_1 + \ldots + a_k)) \text{ und} \\ x_{k+2} = \ldots = x_n &= 0 \end{aligned}$$

optimal.
Offensichtlich ist diese Wahl primal zulässig. Wir versuchen nun, eine zugehörige dual zulässige Lösung zu finden, sodass die komplementären Schlupfbedingungen erfüllt sind.

(a) Dualisiere die LP-Relaxation unter Verwendung der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ sowie z und stelle die komplementären Schlupfbedingungen auf. (1 Pkt.)

(b) Bestimme mit Hilfe der komplementären Schlupfbedingungen für x_{k+1} den Wert von z sowie y_{k+1}. Nimm der Einfachheit halber an, dass $x_{k+1} > 0$ gilt. (1 Pkt.)

(c) Bestimme $y_1, \ldots, y_k$ und zeige mit $(*)$, dass dies eine zulässige Wahl ist. (2 Pkte.)

(d) Bestimme $y_{k+2}, \ldots, y_n$ und zeige zusammenfassend, dass alle komplementären Schlupfbedingungen erfüllt sind und die gefundene Lösung dual zulässig ist. (2 Pkte.)

Aufgabe 3 Branch & Bound für den Abschlussball (10 Pkte.)

Die Stiftung *Pink Ties* veranstaltet ihren jährlichen Sommerball und erwartet, dass insbesondere für die berühmt berüchtigte pinke Krawatte und die pinke Fliege hohe Nachfrage herrschen wird. Leider sind es nur noch sechs Tage bis zum Ball und die Uni Bremen, die die Kleidungsstücke selbst produziert, hat nur noch 45m^2 des pinken Stoffs auf Lager. Für zehn Krawatten werden 11m^2 und für zehn Fliegen 9m^2 des pinken Stoffs benötigt. Sowohl bei Krawatten als auch bei Fliegen werden jeweils zehn auf einmal produziert. Für die Produktion von zehn Fliegen benötigt die hauseigene Näherin 1,5 Tage und für zehn Krawatten einen Tag. Die Universität erwartet, dass 6€ pro Fliege bezahlt werden und 5€ pro Krawatte.

(a) Stelle ein ILP auf, um die optimalen Produktionsmengen an Krawatten und Fliegen zu bestimmen. (2 Pkte.)

(b) Löse das Problem durch Anwenden des Branch & Bound Algorithmus aus der Vorlesung.

    Hinweis: Du kannst die auftretenden LPs mittels CPLEX lösen. Zeichne für die Abgabe jedoch den Branch & Bound - Baum und gib an jedem Knoten die aktuellen Werte der Variablen sowie den Zielfunktionswert an. Stelle an den Kanten dar, auf welcher Variable du branchst bzw. wieso du an dieser Stelle den Baum beschneidest. (8 Pkte.)